Důkaz hustoty racionálních čísel

Tomáš Sourada

Věta 1 (hustota $\mathbb{Q}$). *Pro libovolná dvě reálná čísla a, b, pro něž platí $a < b$, existuje racionální číslo q, že platí $a < q < b$.*

Intuice 1. Pojďme se krátce zamyslet, co nám naše věta říká. Položíme-li $a = 0$ a $b = 1$, dostáváme, že existuje racionální číslo mezi nulou a jedničkou. To zřejmě existuje, například $q = \frac{1}{2}$. Ale co když vezmeme a a b mnohem blíže? Třeba $a = 0$ a $b = 0,0000000001$. Snadno nahlédneme, že jsou-li a, b racionální (tedy je lze vyjádřit ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, m, n jsou nesoudělná), jejich aritmetický průměr je také racionální a leží mezi nimi. Věta nám však říká, že vezmeme-li libovolná různá reálná čísla, tak jakkoliv budou u sebe blízko, vždy najdeme nějaké racionální číslo, které bude mezi nimi. Pozor však, abychom nenabyli mylného dojmu, že je tedy racionálních čísel „stejně“ jako všech reálných. Zatímco racionální čísla jsou spočetná (lze je jednoznačně očíslovat přirozenými čísly), čísla reálná spočetná nejsou (důkaz spočetnosti racionálních i nespočetnosti reálných čísel není těžký a je zajímavý, nechť si ho tedy laskavý čtenář provede sám, popřípadě učiní v nějakém dalším referátku).

Dohoda 1. Reálná čísla zapisujeme jejich desetinným rozvojem. V případě dvojznačnosti volme možnost s ukončeným rozvojem (například pro číslo $1,\overline{9} = 2$ volme zápis 2).

Důkaz (věta o hustotě $\mathbb{Q}$): Z úvahy, kterou jsme vedli v intuici, bychom mohli usoudit, že postačí spočítat aritmetický průměr čísel a a b. Jenže to není tak snadné. To vůbec nemusí být racionální číslo. Podívejme se tedy na to jinak.
Buďte dána čísla $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Číslo q, pro něž platí $a < q < b$ nalezneme přímou konstrukcí. Čísla a, b můžeme zapsat pro $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ (dokonce budeme uvažovat a_0, b_0 nezáporná - pro zbylé možnosti důkaz provedeme analogicky) a cifry $a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ jako $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$; $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$
Jelikož $a \neq b$, $\exists k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k$. Vezměme nejmenší takové k. Pak

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1} = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_{k-1}$$
$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1} a_k < b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_{k-1} b_k$$

Zápis desetinného rozvoje hledaného čísla q bude takový:

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, k\} : q_i = a_i$$

Díky tomu zřejmě $q < b$ (jelikož $q_k = a_k < b_k$, předchozí cifry jsou pro q i b stejné a za q_k nemůžou dle dohody následovat samé cifry 9, které by hodnotu cifry q_k pomyslně zvýšily, aby dorovnala hodnou b_k).
Další cifry čísla q (tedy q_{k+1}, q_{k+2}, ...) budou cifry 9. A bude jich konečně mnoho, konkrétně o jednu víc, než kolik jich je v zápisu čísla a za cifrou a_k (tedy a_{k+1}, a_{k+2}, ...), než se v zápisu čísla a objeví jiná cifra než 9. Ta se někdy jistě objeví (díky dohodě nemůže žádné číslo končit nekonečným zápisem devítek). Tedy

$$\exists l \in \mathbb{N} : a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{l-1} a_l \ldots$$
$$q = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{l-1} 9;$$

kde

$$
\begin{aligned}
&a_0 \in \mathbb{N} \\
&a_1, a_2, \dots, a_k \in \{0, \dots, 9\} \\
&a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_{l-1} = 9 \\
&a_l \neq 9
\end{aligned}
$$

Zřejmě tedy $a < q$, což bylo dokázati.
Námi nalezené q má ukončený desetinný rozvoj, tedy $q \in \mathbb{Q}$ a také $a < q < b$. $\square$

Můžeme ještě poznamenat, že nalezené číslo q samozřejmě není jediným racionálním číslem, které je ostře mezi a a b. Pozorný čtenář si může všimnout, že racionálních čísel s takovou vlastností je ve skutečnosti nekonečno (můžeme důkaz opakovat po položení $a = a$ a $b = q$).